



Серия №35. Теорема Хелли

20 июля

Определение. Выпуклое множество точек – такое множество, что для любых двух точек A, B из него все точки отрезка AB тоже ему принадлежат. Выпуклая оболочка множества – минимальное по включению выпуклое множество, содержащее в себе данное.

1. Множество точек S содержит вершины некоторого выпуклого многоугольника. Докажите, что выпуклая оболочка множества S содержит в себе весь многоугольник.
2. На плоскости даны $k \geq 4$ точек (возможно, совпадающих). Докажите, что можно разбить эти точки на 2 непустых подмножества так, что их выпуклые оболочки пересекаются (т.е. содержат хотя бы одну точку плоскости, не обязательно среди данных k).
3. **Теорема Хелли.** На плоскости расположено N выпуклых множеств, у любых трёх есть общая точка. Докажите, что тогда у любых $3 \leq n \leq N$ множеств есть общая точка.

Указание: проведите индукцию по n .

4. Докажите, что теорема Хелли не верна для бесконечного числа множеств, т.е. даже если любые три множества выпуклы и пересекаются, то все множества могут не иметь общей точки.
5. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трех его сторон можно выбрать точку O внутри многоугольника так, что перпендикуляры, опущенные из точки O на эти стороны, попадают на них, а не на их продолжения. Докажите, что тогда такую точку O можно выбрать для всех сторон одновременно.
6. На плоскости проведено n прямых и для каждой прямой выбрали одну из двух полуплоскостей, на которые она делит плоскость. Известно, что выбранные полуплоскости целиком покрывают всю плоскость. Докажите, что можно оставить только 3 полуплоскости, которые также покрывают всю плоскость.
7. На столе сидит n комаров, любых троих из которых можно прибить круглой кружкой радиуса 1. Докажите, что их всех можно прибить этой кружкой одновременно.
8. **Теорема Юнга.** На плоскости даны несколько точек, расстояние между любыми двумя не превосходит 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
9. **Теорема Бляшке.** Если выпуклый многоугольник A нельзя покрыть никакой полоской ширины 1, то он содержит круг радиуса $\frac{1}{3}$.
10. На плоскости дано несколько параллельных отрезков, причем для любых трех из них найдется прямая, их пересекающая. Докажите, что найдется прямая, пересекающая все отрезки.